6　2 次方程式の理論

42

(1)

判別式を D とすると，$D=0$

これと $\dfrac{D}{4}=m^2-2m-3=(m+1)(m-3)$ より，$(m+1)(m-3)=0$　$\therefore m=-1,\ 3$

(2)

判別式を D とすると，$D>0$

これと $\dfrac{D}{4}=4(m+1)^2-4(5m^2+6m-2)=-4(2m+3)(2m-1)$ より，$(2m+3)(2m-1)<0$

$\therefore -\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{1}{2}$　・・・①

2 つの解を α,β とすると，$\alpha\beta<0$

また，解と係数の関係より，$\alpha\beta=5m^2+6m-2$

よって，$5m^2+6m-2<0$ より，$\dfrac{-3-\sqrt{19}}{5}<m<\dfrac{-3+\sqrt{19}}{5}$　・・・②

①かつ②より，$\dfrac{-3-\sqrt{19}}{5}<m<\dfrac{-3+\sqrt{19}}{5}$

(3)

$f(x)=0$，$g(x)=0$ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，

$D_1>0$ かつ $D_2<0$ または $D_1<0$ かつ $D_2>0$

これと，$\dfrac{D_1}{4}=(m+1)(m-3)$，$\dfrac{D_2}{4}=-4(2m+3)(2m-1)$ より，

$\begin{cases}(m+1)(m-3)>0\\(2m+3)(2m-1)>0\end{cases}$ または $\begin{cases}(m+1)(m-3)<0\\(2m+3)(2m-1)<0\end{cases}$

これより，$\left(m<-\dfrac{3}{2},\ 3<m\right)$ または $\left(-1<m<\dfrac{1}{2}\right)$

よって，$m<-\dfrac{3}{2}$，$-1<m<\dfrac{1}{2}$，$3<m$

43

解法 1

$y=f(x)=x^2-2ax+2a+3$ とおくと，$f(1)=4>0$ より，

放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $1\leq x\leq 5$ において異なる 2 つの共有点をもてばよい。

$$f(x)=x^2-2ax+2a+3$$
$$=(x-a)^2-(a+1)(a-3)$$

より，

軸 $x=a$ が満たすべき条件：$1<a<5$ ・・・①

頂点の y 座標が満たすべき条件

放物線は下に凸だから，$-(a+1)(a-3)<0$ $\therefore a<-1,\ 3<a$ ・・・②

$f(1)$ と $f(5)$ が満たすべき条件

$f(1)\geq 0$ かつ $f(5)\geq 0$

これと $f(1)=4$，$f(5)=28-8a$ より，$28-8a\geq 0$ $\therefore a\leq\dfrac{7}{2}$ ・・・③

①かつ②かつ③より，$3<a\leq\dfrac{7}{2}$

解法 2

$x^2-2ax+2a+3=0$ より，$x^2=2a(x-1)-3$

ここで，$y=f(x)=x^2$，$y=g(x)=2a(x-1)-3$ とおくと，

放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が $1\leq x\leq 5$ の範囲で異なる 2 つの共有点をもてばよい。

したがって，$x^2=2a(x-1)-3$ すなわち $x^2-2ax+2a+3=0$ の判別式を D とすると，$D>0$

これと，$\dfrac{D}{4}=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$ より，$(a+1)(a-3)>0$ $\therefore a<-1,\ 3<a$ ・・・①

また，$y=g(x)$ は定点 $(1,-3)$ を通り，$1\leq x\leq 5$ の範囲で共有点をもつから，

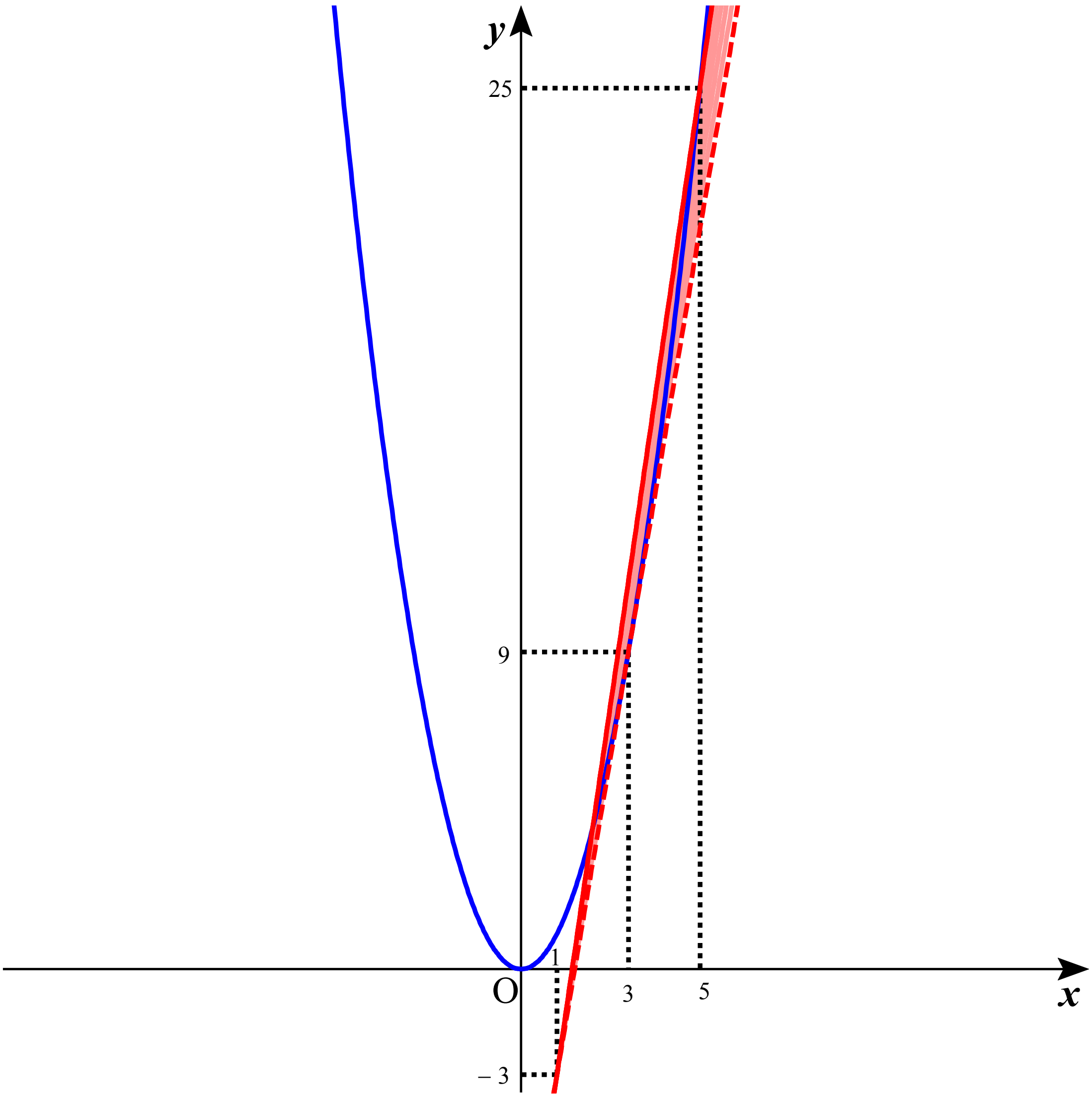
下図より，

$a>0$ ・・・②

$f(5)\geq g(5)$ すなわち $25\geq 8a-3$ $\therefore a\leq\dfrac{7}{2}$ ・・・③

①かつ②かつ③より，$3<a\leq\dfrac{7}{2}$

参考図



44

$x^2+px+q=0$ について

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-p$　・・・①　$\alpha\beta=q$　・・・②

判別式を D_1 とすると，$\alpha,\ \beta$ は異なる実数解だから，$D_1=p^2-4q>0$　・・・③

$x^2+qx+p=0$ について

解と係数の関係より，

$\alpha(\beta-2)+\beta(\alpha-2)=-q$　$\therefore 2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)=-q$　・・・④

$\alpha(\beta-2)\cdot\beta(\alpha-2)=p$　$\therefore(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta=p$　・・・⑤

$\alpha,\ \beta$ は異なる実数解だから，$\alpha(\beta-2)\neq\beta(\alpha-2)$

よって，判別式を D_2 とすると，$D_2=q^2-4p>0$　・・・⑥

①，②を④に代入すると，$2q+2p=-q$　$\therefore p=-\dfrac{3}{2}q$　・・・⑦

①，②を⑤に代入すると，$q^2+2qp+4q=p$

これに⑦を代入し，整理すると，$\frac{q}{2}(4q-11)=0 \quad \therefore q=0,\ \frac{11}{4}$

これと⑦より，$(p,\ q)=(0,\ 0),\ \left(-\frac{33}{8},\ \frac{11}{4}\right)$

この 2 組のうち，③と⑥を満たすのは$(p,\ q)=\left(-\frac{33}{8},\ \frac{11}{4}\right)$

よって，$(p,\ q)=\left(-\frac{33}{8},\ \frac{11}{4}\right)$

45

(1)

判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=a^2-(a-1)\\&=a^2-a+1\\&=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\end{aligned}$$

よって，α,β は異なる実数解である。

(2)

$\alpha<0$ または $\beta<0$ の否定は $\alpha\geq 0$ かつ $\beta\geq 0$ である。

補足：$\overline{(\alpha<0)\cup(\beta<0)}=\overline{(\alpha<0)}\cap\overline{(\beta<0)}=(\alpha\geq 0)\cap(\beta\geq 0)$

$\alpha\geq 0$ かつ $\beta\geq 0$ とすると，$\alpha\neq\beta$ だから，$\alpha+\beta=-2a>0$ かつ $\alpha\beta=a-1\geq 0$

すなわち $a<0$ かつ $a\geq 1$ （矛盾）

よって，$\alpha\geq 0$ かつ $\beta\geq 0$ は成り立たない。

ゆえに，$\alpha<0$ または $\beta<0$　すなわち α と β のうち，少なくとも 1 つは負である。

(3)

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-2a)^2-2(a-1)\\&=4a^2-2a+2\\&=4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

また，$\alpha\leq 0,\ \beta\leq 0$ および $\alpha\neq\beta$ より，$\begin{cases}\alpha+\beta=-2a<0\\ \alpha\beta=a-1\geq 0\end{cases} \qquad \therefore a\geq 1$

よって，$\alpha^2+\beta^2$ は $a=1$ のとき最小値 4 をとる。

46

(1)

$a+b=1-\frac{2}{3}$ $\therefore a+b=\frac{1}{3}$ ・・・①

$a^2+b^2=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ・・・②

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ・・・③

①，②，③より，$\frac{1}{9}-2ab=\frac{5}{9}$ $\therefore ab=-\frac{2}{9}$ ・・・④

①，④より，a, b は 2 次方程式 $t^2-\frac{1}{3}t-\frac{2}{9}=0$ すなわち $9t^2-3t-2=0$ の解である。

よって，$9t^2-3t-2=(3t+1)(3t-2)=0$ より，$(a, b)=\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

(2)

$a+b=1-c$ ・・・⑤

$a^2+b^2=1-c^2$ ・・・⑥

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ・・・⑦

⑤，⑥，⑦より，$(1-c)^2-2ab=1-c^2$ $\therefore ab=c^2-c$ ・・・⑧

⑤，⑧より，a, b は 2 次方程式 $t^2-(1-c)t+c^2-c=0$ の解である。

これと a, b は実数であることから，判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D&=\{-(1-c)\}^2-4(c^2-c)\\ &=-(3c^2-2c-1)\\ &=-(3c+1)(c-1)\geq 0 \end{aligned}$$

よって，$-\frac{1}{3}\leq c\leq 1$

47

(1)

解法 1：文字定数が a の 1 種類でしかも次数が 1　⇒　文字定数分離を試みる

(1)

①より，$a(x+1)=-x^2+x-2$

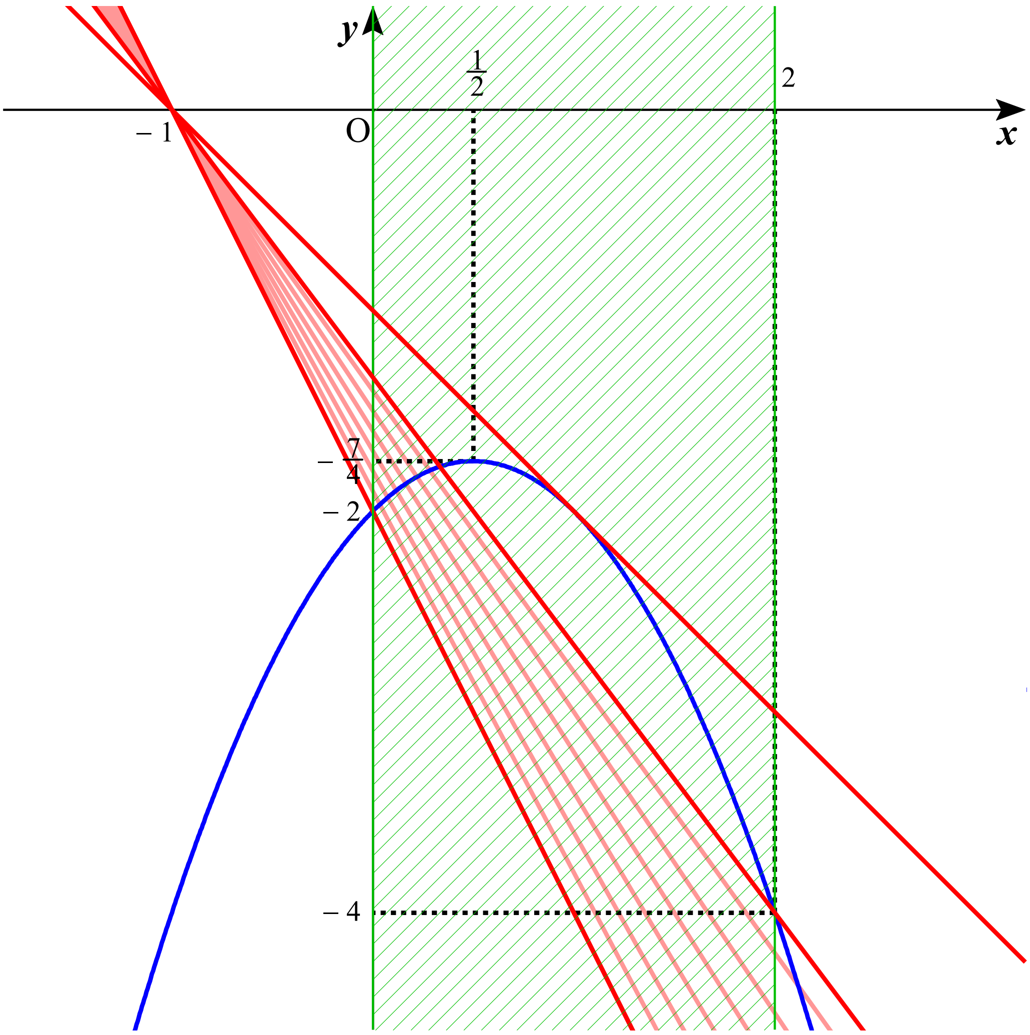
$y=a(x+1)$　・・・②，$y=-x^2+x-2$　・・・③　とすると，

直線②と放物線③が $0\leq x\leq 2$ の範囲にただ 1 つ共有点をもつような a の値の範囲をグラフから求めればよい。

②は定点 $(-1,\ 0)$ を通る直線

③は $(0,\ -2)$，$(2,\ -4)$ を通る放物線で，$y=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$ と変形できることから，

その頂点の座標は $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$



よって，グラフは上図のようになる。

したがって，傾き a の値は②が $(0,\ -2)$ を通るときの傾き以上かつ $(2,\ -4)$ を通るときの傾き未満であるか，③と接する負の傾きであればよい。

②がを通るときの傾き

$-2=a(0+1)$ より，　$a=-2$

②が $(2,\ -4)$ を通るときの傾き

$-4=a(2+1)$ より，　$a=-\frac{4}{3}$

②が③と接するときの負の傾き

①が重解をもつのと同値だから，①の判別式を D とすると，

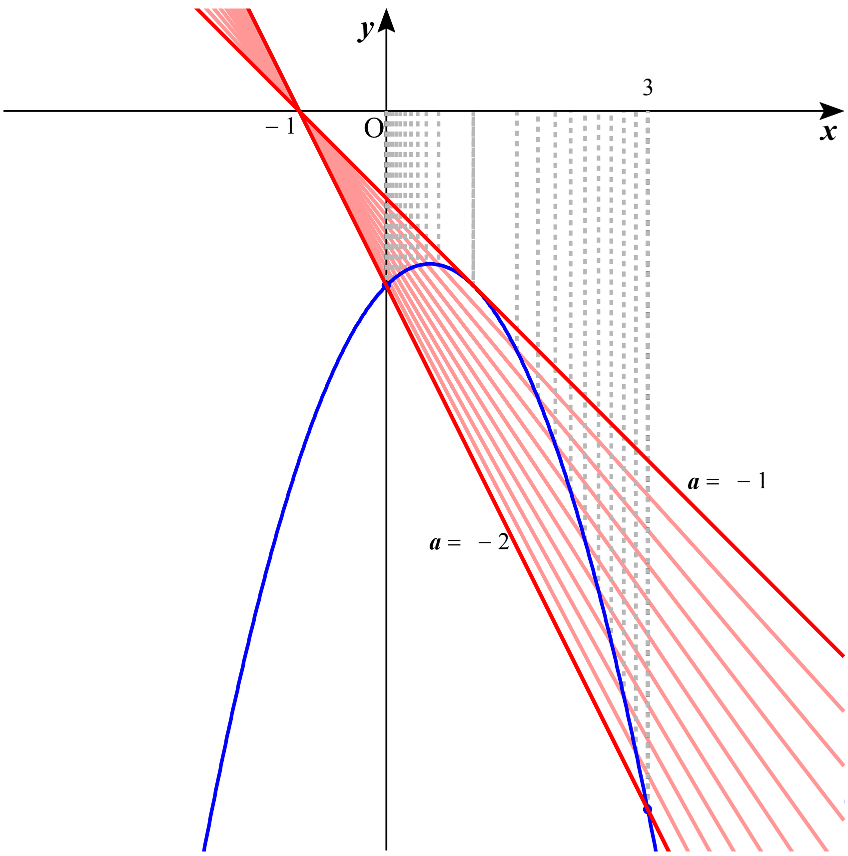
$$\begin{aligned} D&=(a-1)^2-4(a+2)\\ &=a^2-6a-7\\ &=(a+1)(a-7)\\ &=0 \end{aligned}$$

これと $a<0$ より，　$a=-1$

以上より，　$-2\le a<-\frac{4}{3},\ a=-1$

(2)

下図より，　$0\le x\le 3$



解法 2：文字定数を分離し，数学Ⅲで解く

$x=-1$ は①の解ではないから，①を $a=\dfrac{-x^2+x-2}{x+1}$ と変形できる。

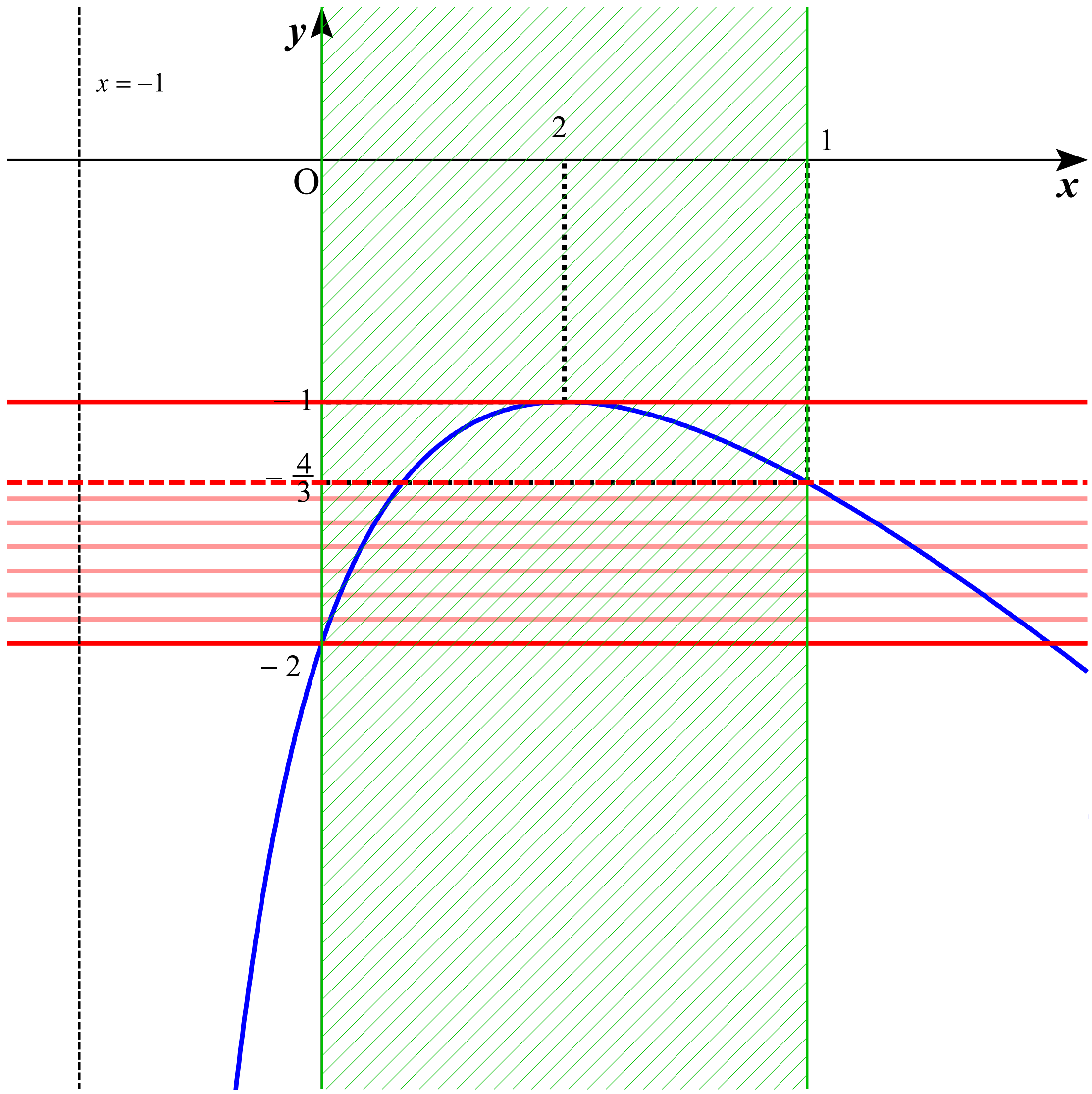
ここで，$y=f(x)=\dfrac{-x^2+x-2}{x+1}$ とおき，

$0\leq x\leq 2$ における $y=a$ と $y=f(x)$ の共有点の数を調べる。

$f'(x)=-\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ より，$-1<x$ における $f(x)$ の増減は次のようになる。

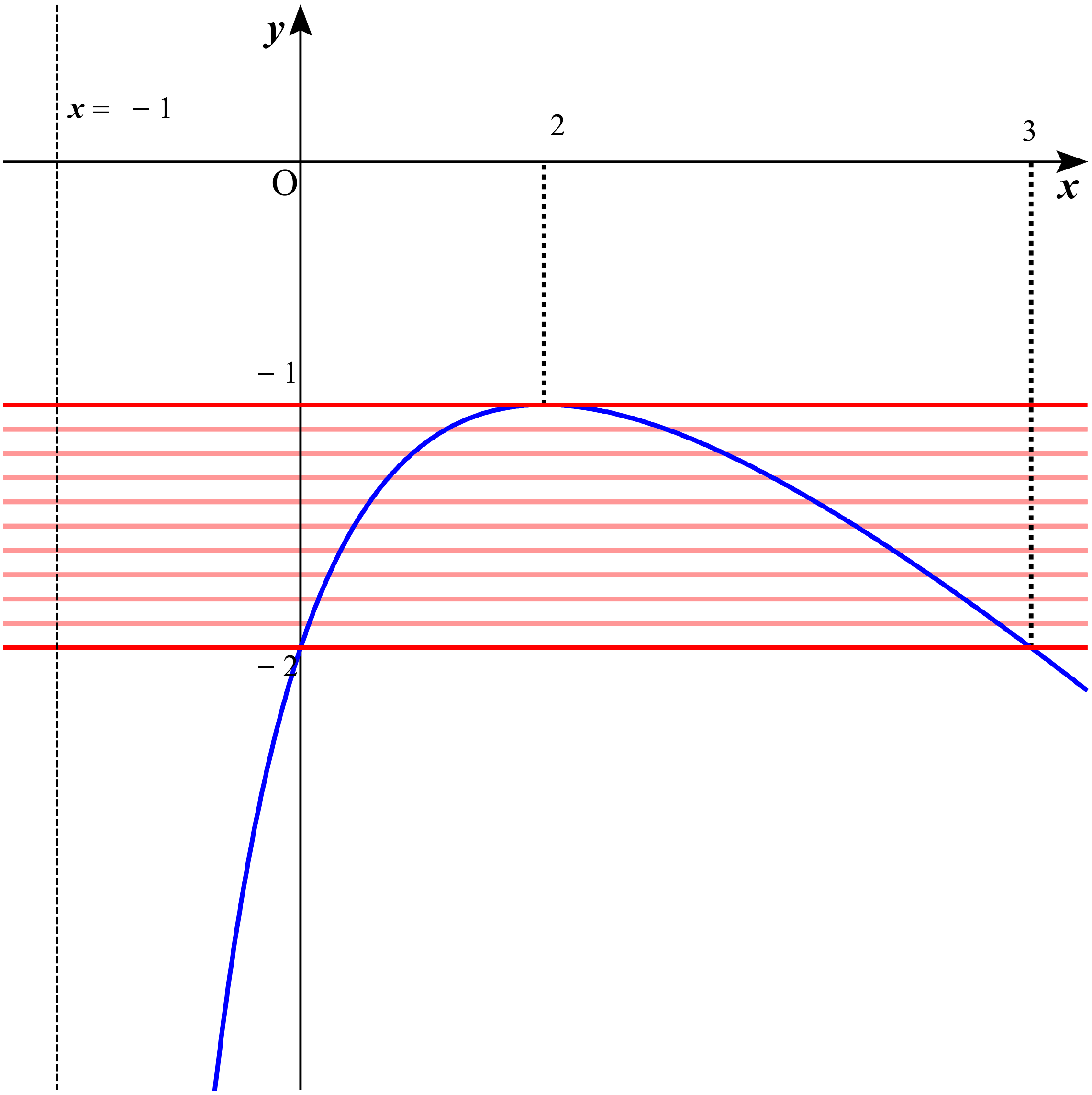
x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	↑	-1	↓

よって，下図グラフから，$a=-1,\ -2\leq a<-\dfrac{4}{3}$



(2)

下図グラフより， $0 \leq x \leq 3$



解法 3：座標横軸（x 軸，a 軸）との共有点問題とみなして解く

(i) 重解をもつとき

重解を α とすると，解と係数の関係より $2\alpha=-(a-1)$ だから，$\alpha=-\dfrac{a-1}{2}$

α が満たすべき条件は $0\leq\alpha\leq 2$ だから，$0\leq-\dfrac{a-1}{2}\leq 2 \quad \therefore -3\leq a\leq 1$　・・・②

また，判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}D&=(a-1)^2-4(a+2)\\&=a^2-6a-7\\&=(a+1)(a-7)=0\end{aligned}$$

$\therefore a=-1,\ a=7$　・・・③

②かつ③より，$a=-1$　・・・④

(ii) 異なる 2 実数解をもつとき

$y=f(x)=x^2+(a-1)x+a+2$ とすると，$f(x)=\left(x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)(a-7)}{4}$

$y=f(x)$ は下に凸の放物線で，x 軸と 2 つの異なる共有点をもつから，

$-\dfrac{(a+1)(a-7)}{4}<0 \quad \therefore a<-1,\ 7<a$　・・・⑤

(ii)-1 共有点が $x=0$ または $x=2$ のとき

共有点が $x=0$ のとき

$f(0)=a+2=0$ より，$a=-2$　・・・⑥

よって，$f(x)=x^2-3x=x(x-3)$ より，もう 1 つの共有点は $x=3$

よって，条件を満たす。

共有点が $x=2$ のとき

$f(2)=3a+4=0$ より，$a=-\dfrac{4}{3}$

よって，$f(x)=x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3x^2-7x+2}{3}=\dfrac{(3x-1)(x-2)}{3}$ より，

もう 1 つの共有点は $x=\dfrac{1}{3}$

よって，不適

(ii)-2 共有点が $\mathbf{0 < x < 2}$ の範囲にあるとき

$f(0)f(2) < 0$ より，$(a+2)(3a+4) < 0$　$\therefore -2 < a < -\dfrac{4}{3}$　・・・⑦

（⑤かつ⑥）または（⑤かつ⑦）より，$-2 \leq a < -\dfrac{4}{3}$

(i)，(ii)より，$a = -1,\ -2 \leq a < -\dfrac{4}{3}$

(2)

①が実数解をもつ条件は，判別式を D とすると，$D = (a+1)(a-7) \geq 0$ より，$a \leq -1,\ 7 \leq a$

よって，$-2 \leq a \leq -1$ は①が実数解をもつための十分条件である。

そこで，①を a について整理し，直線 $y = g(a) = (x+1)a + x^2 - x + 2$ を考えと，

$-2 \leq a \leq -1$ において a 軸と共有点をもつ実数 x が存在することになる。

すなわち $g(-2)g(-1) \leq 0$ が成り立つ。

これと

$$\begin{aligned} g(-2)g(-1) &= (x^2 - 3x)(x^2 - x + 2) \\ &= x(x-3)(x^2 - x + 2) \\ &= x(x-3)\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right\} \end{aligned}$$

より，$x(x-3) \leq 0$　$\therefore 0 \leq x \leq 3$

48

解法 1

$y=f(x)=x^2-nx+m$ とおくと，

$y=f(x)$ が $x\geq N$ の範囲で x 軸と少なくとも 1 つの共有点をもてばよい。

$f(x)=\left(x-\dfrac{n}{2}\right)^2-\dfrac{n^2}{4}+m$ より，　$y=f(x)$ の軸は $x=\dfrac{n}{2}$ である。

$\dfrac{n}{2}\leq N$ のとき

　$f(N)\leq 0$ であればよいから，　$N^2-nN+m\leq 0$　　$\therefore m\leq nN-N^2$

$\dfrac{n}{2}>N$ のとき

　条件より，　$0<n\leq 2N$ だから，　$\dfrac{n}{2}\leq N$

　よって，不適

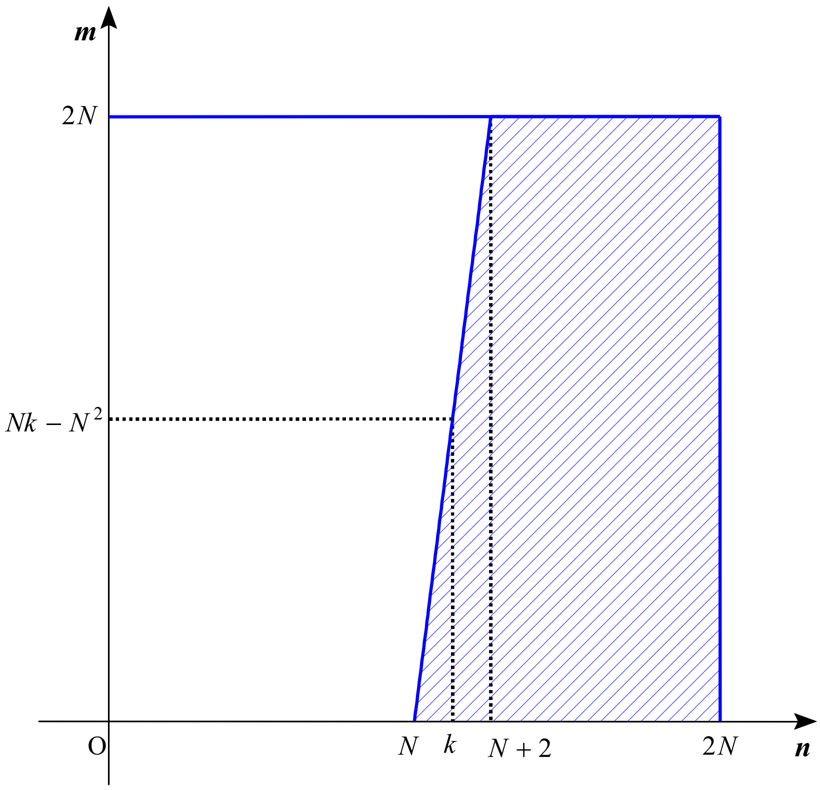
したがって，縦軸を m ，横軸を n とする座標平面上の，$1\leq m\leq 2N,\ 1\leq n\leq 2N,\ m\leq Nn-N^2$ を満たす領域における格子点 $(n,\ m)$ の数を求めればよい。

$m=2N$ と $m=Nn-N^2$ の共有点の n 座標は,

$2N=Nn-N^2$ より，　$N\{n-(N+2)\}=0$　　$\therefore n=N+2$

そこで，　$N+2\leq 2N$ と $2N<N+2$ で場合分けして，格子点の数を求めることにする。

$N+2\leq 2N$　　すなわち $N\geq 2$ のとき



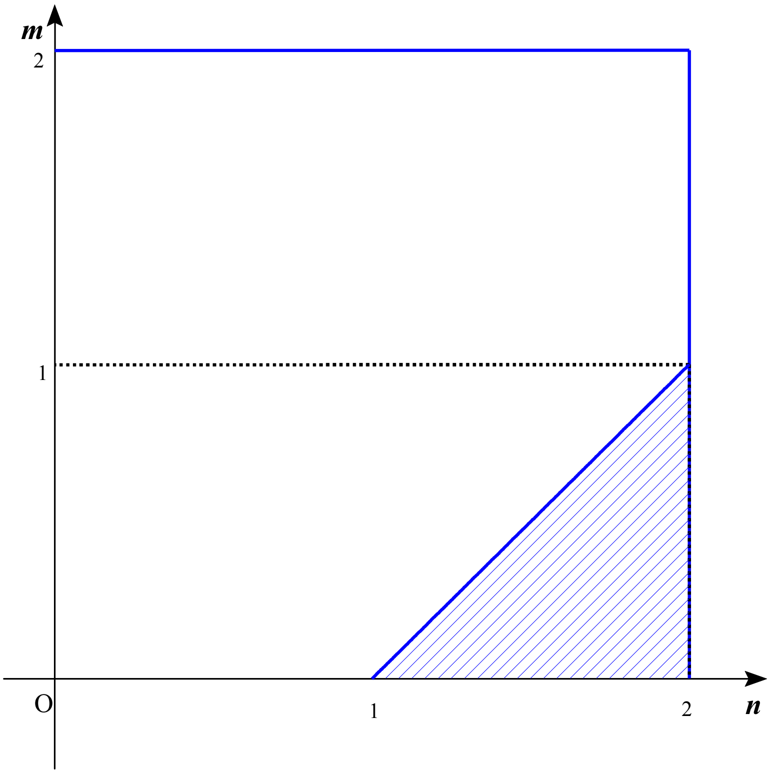
図より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{N+2}\left(Nk-N^2\right)+2N\{2N-(N+3)+1\}&=N\sum_{k=N}^{N+2}k-3N^2+2N(N-2)\\&=N\cdot\frac{N+(N+2)}{2}\cdot 3-3N^2+2N(N-2)\\&=2N^2-N\end{aligned}$$

$N+2>2N$　すなわち $N=1$ のとき

$1\leq m\leq 2,\ 1\leq n\leq 2,\ m\leq n-1$ を満たす格子点は $(n,\ m)=(2,\ 1)$ の 1 つである。

よって，$2N^2-N$ は $N=1$ のときも成り立つ。



以上より，格子点の数は $2N^2-N$

ゆえに，$(m,\ n)$ の組の数は $2N^2-N$

解法 2

$x^2 - nx + m = 0$ の 2 実数解を $\alpha,\ \beta$ とする。

【1】$\alpha > N,\ \beta > N$ のとき

$\alpha + \beta > 2N$，解と係数の関係より $\alpha + \beta = n$　$\therefore n > 2N$

これは n が $2N$ 以下の整数であることに反するから $\alpha > N,\ \beta > N$ は不適である。

【2】$\alpha = N$ のとき

$x^2 - nx + m = 0$ の判別式を D とすると，$D \geq 0$ より，$n^2 - 4m \geq 0$　・・・①

解と係数の関係より，$N + \beta = n,\ N\beta = m$　・・・②

①，②より，$(N+\beta)^2 - 4N\beta = (N-\beta)^2 \geq 0$　$\therefore \beta = N$

ゆえに，N を実数解にもつとき，その解は重解であり，これより $n = 2N,\ m = N^2$

これと $1 \leq n \leq 2N,\ 1 \leq m \leq 2N$ より，$1 \leq 2N \leq 2N,\ 1 \leq N^2 \leq 2N$　$\therefore N = 1,\ 2$

ゆえに，$(n,\ m)$ は $(2,\ 1),\ (4,\ 4)$ の 2 組

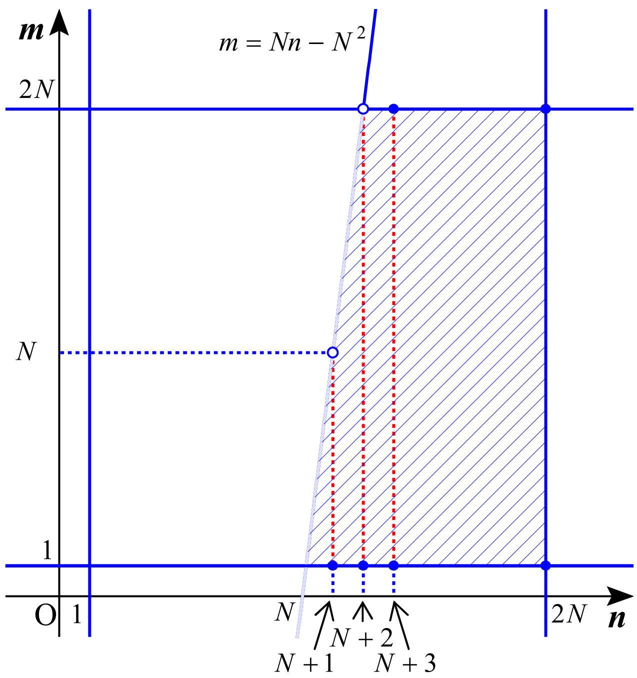
【3】N が α と β の間の数のとき

$x = N$ のとき $y < 0$ であればよいから，$N^2 - nN + m < 0$　$\therefore m < Nn - N^2$

したがって，$m = Nn - N^2$ を m を n の関数と見て，$m < Nn - N^2$，$1 \leq n \leq 2N$，$1 \leq m \leq 2N$ を満たす領域の格子点の数，すなわち $(n,\ m)$ の組の数を求めればよい。

よって，図より，$(n,\ m)$ の組の数は

$\{(N-1)-1+1\} + \{(2N-1)-1+1\} + (2N-1+1)\{2N-(N+3)+1\} = 2N^2 - N - 2$



【1】～【3】より，$(m,\ n)$ の組の総数は $2 + 2N^2 - N - 2 = 2N^2 - N$　・・・(答)

解法 3

$x^2-nx+m=0$ の判別式を D とすると，

実数解条件は $D=n^2-4m\geq 0$　$\therefore m\leq \dfrac{n^2}{4}$　・・・①

①が成り立つ下で，2 つ実数解がいずれも N より小さいときの必要十分条件を求める。

2 つ実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると，$\alpha<N,\ \beta<N$ より，$\alpha-N<0,\ \beta-N<0$

$\alpha-N<0,\ \beta-N<0$ と $(\alpha-N)+(\beta-N)<0,\ (\alpha-N)(\beta-N)>0$ は必要十分の関係であり，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=n,\ \alpha\beta=m$ であることから，

2 つ実数解がいずれも N より小さいときの必要十分条件は

$(\alpha-N)+(\beta-N)=(\alpha+\beta)-2N=n-2N<0$　$\therefore n<2N$　・・・②

$(\alpha-N)(\beta-N)=\alpha\beta-N(\alpha+\beta)+N^2=m-Nn+N^2>0$　$\therefore m>Nn-N^2$　・・・③

より，

②かつ③，すなわち $(n<2N)\cap(m>Nn-N^2)$　・・・④　が成り立つことである。

少なくとも 1 つの解が N 以上であるための条件を求める。

条件は $①\cap\overline{④}$（$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$）

これと

$$
\begin{aligned}
\overline{④}&=\overline{(n<2N)\cap(m>Nn-N^2)}\\
&=\overline{(n<2N)}\cup\overline{(m>Nn-N^2)}\\
&=(n\geq 2N)\cup(m\leq Nn-N^2)
\end{aligned}
$$

より，

$$①\cap\overline{④}=\left(m\leq\frac{n^2}{4}\right)\cap\{(n\geq 2N)\cup(m\leq Nn-N^2)\}$$

これに条件 $1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ を加えることにより，

条件は，$m\leq\dfrac{n^2}{4}$，$m\leq Nn-N^2$，$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$

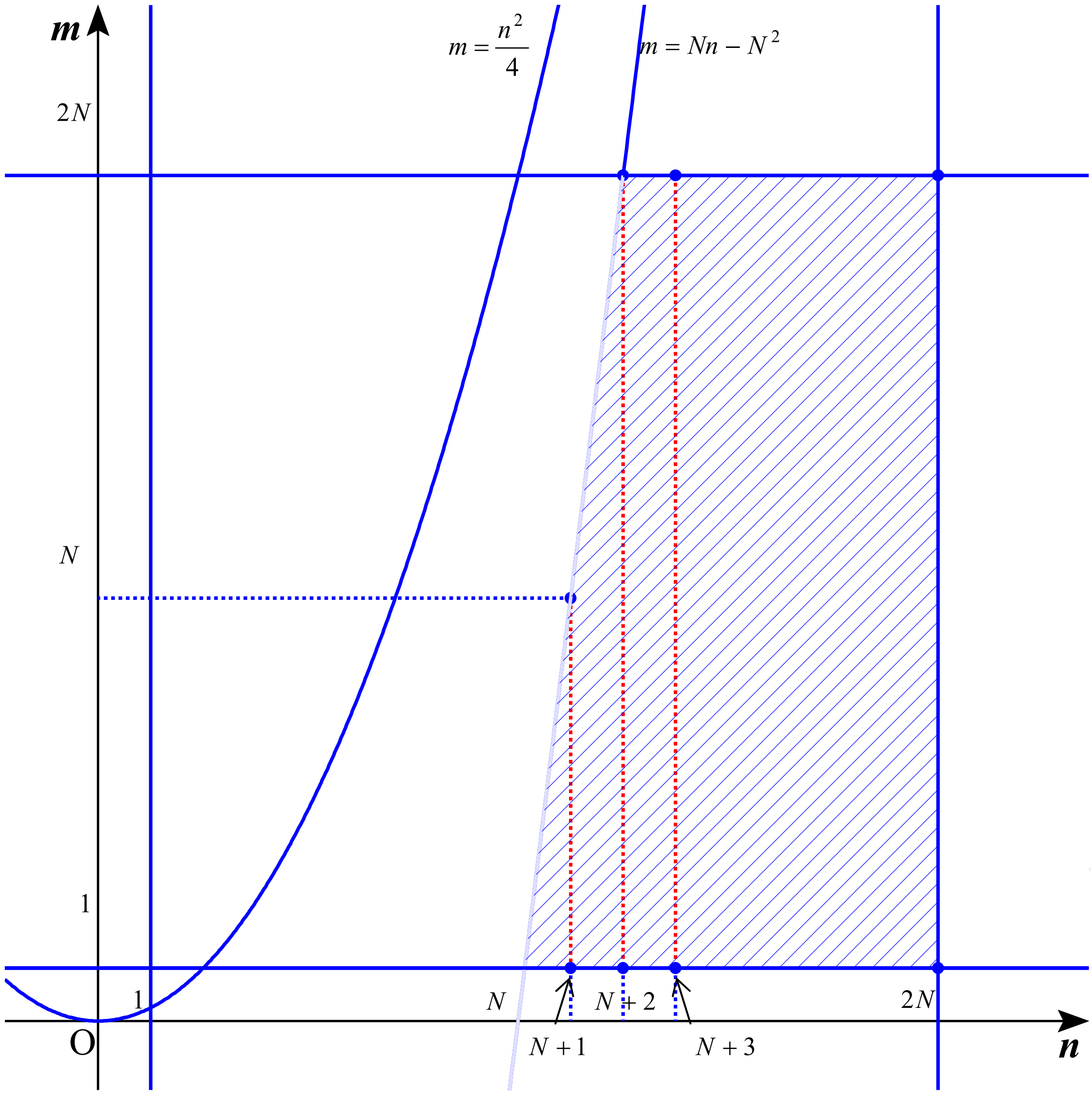
$(m,\ n)$ の組の数

$m\leq\dfrac{n^2}{4}$，$m\leq Nn-N^2$，$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ を nm 座標平面上に表し，

格子点の数，すなわち $(m,\ n)$ の組の数を求めればよい。

よって，次ページの図の斜線部の格子点の数より，$(m,\ n)$ の組の数は

$\{(N-1)+1\}+(2N-1+1)\{2N-(N+2)+1\}=2N^2-N$　・・・(答)



m
$m=\frac{n^2}{4}$
$m=Nn-N^2$
$2N$
N
1
1
O
N
$N+1$
$N+2$
$N+3$
$2N$
n